ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΥΠΟΟΜΑΔΕΣ - ΟΜΑΔΑ ΠΗΛΙΚΟ :

1) Να δειχθεί ότι η:

$SL(2,\mathbb{R})$ είναι κανονική υποομάδα της $GL(2,\mathbb{R})$

ΛΥΣΗ

$$SL(2,\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_{2\times 2} \,/\, \det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=1\right\}$$

$I_2\in SL(2,\mathbb{R})\neq\emptyset$ και $SL(2,\mathbb{R})\subseteq GL(2,\mathbb{R})$

Έστω τυχαία στοιχεία $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}$ εν $SL(2,\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\underbrace{a'd'-c'b'}_{=1}}\begin{pmatrix}d'&-b'\\-c'&a'\end{pmatrix}. \qquad ad-cb=1 \text{ και } a'd'-c'b'=1 \quad ①$$

Έτσι,

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{d'}{a'd'-c'b'}&-\frac{b'}{a'd'-c'b'}\\-\frac{c'}{a'd'-c'b'}&\frac{a'}{a'd'-c'b'}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{a'd'-c'b'}(ad'-bc')&\frac{1}{a'd'-c'b'}(-ab'+ba')\\\frac{1}{a'd'-c'b'}(cd'-dc')&\frac{1}{a'd'-c'b'}(-cb'+da')\end{pmatrix}=\frac{1}{\underbrace{a'd'-c'b'}_{=1}}\begin{pmatrix}ad'-bc'&ba'-ab'\\cd'-dc'&da'-cb'\end{pmatrix} \quad ②$$

Όπου ① $(ad-cb)\cdot(a'd'-c'b')\neq 0\Rightarrow ada'd'-adb'c'-bca'd'+bcb'c'=1$.

Έτσι ② $\det\begin{pmatrix}ad'-bc'&ba'-ab'\\cd'-dc'&da'-cb'\end{pmatrix}=(ad'-bc')(da'-cb')-(cd'-dc')\cdot(ba'-ab')=$

$$=ada'd'+\cancel{acbd'}-\cancel{bdc'a'}+bcb'c'-bcd'a'+\cancel{acb'd'}+\cancel{bda'c'}-adb'c'=$$

$$=ada'd'+bcb'c'-bcd'a'-adb'c'=1 \quad (\text{από την } ①)$$

Άρα, $SL(2,\mathbb{R})\leq GL(2,\mathbb{R})$

Έστω τώρα στοιχεία

$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})$ και $\begin{pmatrix}\alpha'&\beta'\\\gamma'&\delta'\end{pmatrix}\in GL(2,\mathbb{R})$

Αφού $\det=1$

Εφόσον $\begin{pmatrix}\alpha'&\beta'\\\gamma'&\delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha'&\beta'\\\gamma'&\delta'\end{pmatrix}^{-1}\in SL(2,\mathbb{R})$ $\qquad SL(2,\mathbb{R})\triangleleft GL(2,\mathbb{R})$

2) Αν $H \leq G$, $K \lhd G$ τότε $H \cap K \lhd H$

ΛΥΣΗ

$K \lhd G \Rightarrow (\forall \beta \in H)(\forall a \in G): a\beta a^{-1} \in H$

Εξαρχής θδο $H \cap K \leq H$.

$H \cap K \subseteq H$ και όπως H ομάδα $(e \in H \neq \emptyset)$

1) Για τυχόντα $a, \beta \in H \cap K \Rightarrow a * \beta \in H \cap K$ κλειστή πράξη

2) Έστω τυχόν $a \in H \cap K \Rightarrow a \in H$ & $a \in K \Rightarrow a^{-1} \in H$ & $a^{-1} \in K \Rightarrow a^{-1} \in H \cap K$

Άρα, $H \cap K \leq H$

Έπειτα, θα δείξουμε ότι: $(\forall \delta \in H \cap K)(\forall \gamma \in H): \gamma * \delta * \gamma^{-1} \in H \cap K \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma * \delta * \gamma^{-1} \in H$ & $\gamma * \delta * \gamma^{-1} \in K$ ①

Όπως $K \lhd G \Rightarrow (\forall \delta \in K)(\forall \gamma \in G): \gamma * \delta * \gamma^{-1} \in H$

Έστω τώρα το $\gamma \in H$ και $\gamma \notin K \Rightarrow \gamma \notin H \cap K$

άρα $\delta \in H \cap K \Rightarrow \gamma * \delta * \gamma^{-1} \in K$

$\Big\} \gamma * \delta * \gamma^{-1} \in H \cap K \Rightarrow$

$\Rightarrow H \cap K \lhd H$

3) Αν $Y \leq O$, $H \lhd O$ τότε $H \cdot Y = \{ a\beta \mid a \in H \text{ \& } \beta \in Y \} \leq O$

ΛΥΣΗ

$H \subseteq O$, $e \in H$ & $e \in Y \Rightarrow e \in HY \neq \emptyset$

• Έστω τυχόν $x \in HY \Rightarrow (\exists a \in H)(\exists \beta \in Y): x = a \xRightarrow[Y \leq O]{H \leq O} x^{-1} = \beta^{-1} \cdot a^{-1} \in HY$

• Έστω $x, y \in H \Rightarrow (\exists a, \gamma \in H)(\exists \beta, \delta \in Y): x = a\beta$ και $y = \gamma\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot y = a\beta\gamma\delta = a\beta\delta\underbrace{\delta^{-1}\gamma\delta}_{\varepsilon \in H \text{ ①}} \xlongequal[\gamma \in H]{H \lhd O} a\underbrace{\beta\delta}_{J \in Y \text{ ②}}\varepsilon = aJ\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow xyJ^{-1} = aJ\varepsilon J^{-1} \Rightarrow xyJ^{-1} \overset{①}{\underset{②}{=}} a\underbrace{J\varepsilon J^{-1}}_{\in H} \xRightarrow{xyJ^{-1} \in H} (x \cdot y J^{-1})J^{-1} \in HY$

4) Αν Y και $H \triangleleft G$ και $Y \cap H = \{e\}$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$ab = ba \quad , \forall a \in Y \, , b \in H.$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Οδο $ab = ba, \forall a \in Y, b \in H \Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1} = e \, , \forall a \in Y, b \in H$

$\Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1} \in Y \cap H = \{e\} \Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1} \in Y$ <u>και</u> $aba^{-1}b^{-1} \in H$

Για αυτό το σκοπό επιλέγουμε το στοιχείο $aba^{-1}b^{-1}$ για το οποίο παρατηρούμε ότι:

$$aba^{-1}b^{-1} = \underbrace{(aba^{-1})}_{\in H \triangleleft G} \underbrace{b^{-1}}_{\in H \leq G} \in H \quad \text{και} \quad a \in G \, (a \in Y \subseteq G)$$

καθώς επίσης:

$$aba^{-1}b^{-1} = \underbrace{a}_{\in Y} \underbrace{(ba^{-1}b^{-1})}_{\substack{\in Y \leq G \\ \in Y \triangleleft G}} \in Y \quad \text{και} \quad b \in G \, (b \in H \subseteq G)$$

Έτσι, λοιπόν καταλήγουμε στο ότι:

$$aba^{-1}b^{-1} \in H \cap Y = \{e\} \Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1} = e \Leftrightarrow ab = ba, \forall a \in Y, b \in H.$$

5) Να βρείτε την τάξη των παρακάτω ομάδων πηλίκου

i. $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}) / (\langle 2 \rangle \times \langle 2 \rangle)$, ii. $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5) / (\{0\} \times \mathbb{Z}_5)$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i. <u>α' τρόπος</u>: $|\langle 2 \rangle \times \langle 2 \rangle| = 12$ και $|\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}| = 48$

Άρα, από Θ. Lagrange $[\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} : (\langle 2 \rangle \times \langle 2 \rangle)] = |\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} / (\langle 2 \rangle \times \langle 2 \rangle)| = 4$

<u>β' τρόπος</u>: $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} / (\langle 2 \rangle \times \langle 2 \rangle) \cong \mathbb{Z}_4 / \langle [2]_4 \rangle \times \mathbb{Z}_{12} / \langle [2]_{12} \rangle =: G$

όπου $\langle [2]_4 \rangle = \{0, 2\}$ και $\langle [2]_{12} \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

Άρα, $[\mathbb{Z}_4 : <[2]_4>] = 2$ & $[\mathbb{Z}_{12} : <[2]_{12}>] = 2$

Συνεπώς, $|G| = 2 \cdot 2 = 4$ και $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

(όπου $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$ και $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ όχι κυκλικές)

ii. $\{0\} \times \mathbb{Z}_5 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4)\} \Rightarrow |\{0\} \times \mathbb{Z}_5| = 5.$

Επίσης, $|\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5| = 15$.

Άρα, από Θ. Lagrange $[\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 : \{0\} \times \mathbb{Z}_5] = 3$.

6) Να βρείτε την τάξη του στοιχείου στην ομάδα πηλίκου

i. $5 + <4>$ στην $\mathbb{Z}_{12}/<4>$,

ii. $(2,1) + <(1,1)>$ στην $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6)/<(1,1)>$.

ΛΥΣΗ

i. $<4> = \{0,4,8\} \Rightarrow 5 + <4> = \{5,9,1\} = \{1,5,9\} (= 1 + <4>)$.

$2(5+<4>) = 10 + <4> = \{2,6,10\}$
$3(5+<4>) = 3 + <4> = \{3,7,11\}$
$4(5+<4>) = 8 + <4> = \{0,4,8\} = <4>$

Άρα, η τάξη του σύμπλοκου $(5+<4>)$ στην $\mathbb{Z}_{12}/<4>$ είναι $|5+<4>| = 4$.

[Παρατήρηση: Η τάξη του 5 στην $\mathbb{Z}_{12}$ είναι $O(\bar{5}) = 12$ (αφού $(5,12) = 1$) και επίσης $|5+<4>| = 4 / 12 = O(\bar{5})$]

ii. $<(1,1)> = \{(1,1),(2,2),(1,4),(0,3),(0,0),(2,5)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2,1)+<(1,1)> = \{(0,2),(1,3),(2,4),(0,5),(1,0),(2,1)\}$

$2((2,1)+<(1,1)>) = \{(2,3),(0,4),(2,0),(0,1),(1,5),(1,2)\}$

$3((2,1)+<(1,1)>) = (0,3)+<(1,1)> = <(1,1)>$ (όπως $(0,3)\in<(1,1)>$)

Άρα, η τάξη του συμπλόκου είναι $|(2,1)+<(1,1)>| = 3$.

7) Έστω $H \triangleleft G$ και $k=[G:H]$.
Να δειχθεί ότι: $a^k \in H$, $\forall a \in G$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω τυχόν $a\in G$.
Εάν $a\in H \Rightarrow a^k \in H$ όπως $H\leq G$.
Εάν $a\notin H \Rightarrow aH \neq H \neq Ha$
Έστω $|aH| = m \Leftrightarrow (aH)^m = H \overset{\Theta.Lagr.}{\Rightarrow} m \mid |G/H| = k$
Άρα, $(aH)^k = (aH)^m = H \Leftrightarrow a^m H = H \Leftrightarrow a^m \in H$

8) Έστω η διεδρική $D_4 = \{e,f,f^2,f^3,g,fg,f^2g,f^3g\} \leq \Sigma_4$
~~και $f=(1,2,3,4)$ και $g=(2,4)$~~ και έστω η υποομάδα
$H=\{e,f^3g\}$ της D_4.
i. Να βρεθούν όλα τα αριστερά-δεξιά σύμπλοκα της H
ii. Είναι η $H \triangleleft D_4$;

<u>ΛΥΣΗ</u>

i. $[D_4:H] = \dfrac{|D_4|}{|H|} = 4$ σύμπλοκα αριστερά-δεξιά

- $eH = He = H = \{e, f^3g\}$
- $fH = \{f, g\}$, • $Hf = \{f, f^3gf\} = \{f, f^3f^3g\} = \{f, f^2g\}$
- $f^2H = \{f^2, fg\}$, • $Hf^2 = \{f^2, f^3gf^2\} = \{f^2, f^3f^2g\} = \{f^2, fg\}$
- $f^3H = \{f^3, f^2g\}$ • $Hf^3 = \{f^3, g\}$

ώστε $H \sqcup (fH) \sqcup (f^2H) \sqcup (f^3H) = H \sqcup (Hf) \sqcup (Hf^2) \sqcup (Hf^3) = D_4$

ii. Παρατηρούμε ότι γενικά δεν ισχύει $aH = Ha$, $a \in D_4$

για παράδειγμα $f^3H \neq Hf^3$ και άρα $H \ntrianglelefteq D_4$.